Números complejos

El conjunto formado por todos los números de la forma $a+ib$, donde a y b son números reales, con las operaciones de adición y producto definidas por:

$$\begin{aligned}(a+ib)+(c+id) &= a+c+i(b+d)\\(a+ib)(c+id) &= ac-bd+i(ad+bc)\end{aligned}$$

se llama cuerpo de los números complejos y se representa por $\mathbb{C}$. Se dice que a es la *parte real* y b la *parte imaginaria* del número complejo $a+ib$. Dos números complejos son iguales cuando tienen igual parte real e igual parte imaginaria. Los números complejos con parte imaginaria cero, $a=a+i0$, son números reales. Los números complejos con parte real cero, $ib=0+ib$, se llaman *imaginarios puros*.

Es muy fácil comprobar las propiedades asociativa, conmutativa y distributiva de las operaciones así definidas. El elemento neutro de la suma es 0 y la unidad del producto es 1. Además, $-a - ib$ es el opuesto de $a + ib$, y todo número $a + ib \neq 0$ tiene inverso:

$$(a + ib)\left(\frac{a}{a^2 + b^2} - i\frac{b}{a^2 + b^2}\right) = 1.$$

Por la definición del producto de números complejos, se tiene que:

$$i^2 = -1.$$

El número complejo i se llama *"unidad imaginaria"*.

¿Es cierto que $1 = -1$?

Acabamos de ver que $i^2 = -1$ pero eso no nos permite escribir así, sin más ni más, que $i = \sqrt{-1}$. Fíjate lo que ocurre si ponemos $i = \sqrt{-1}$ y manejamos ese símbolo con las reglas a las que estamos acostumbrados:

$$-1 = i^2 = i\,i = \sqrt{-1}\sqrt{-1} = \sqrt{(-1)(-1)} = \sqrt{1} = 1$$

Luego $1 = -1$. Por tanto, las matemáticas son contradictorias y aquí hemos acabado.

¿Dónde está el error?

No hay un orden en $\mathbb{C}$ compatible con la estructura algebraica

Al ampliar $\mathbb{R}$ a $\mathbb{C}$ ganamos mucho pero perdemos la relación de orden. No se puede definir un concepto de número complejo positivo de forma que la suma y el producto de complejos positivos sea positivo. Por ello no se define en $\mathbb{C}$ ningún orden.

Así que ya sabes:

¡nunca escribas desigualdades entre números complejos!

Naturalmente, puedes escribir desigualdades entre las partes reales o imaginarias de números complejos, porque tanto la parte real como la parte imaginaria de un número complejo son números reales.

Representación gráfica complejo conjugado y módulo

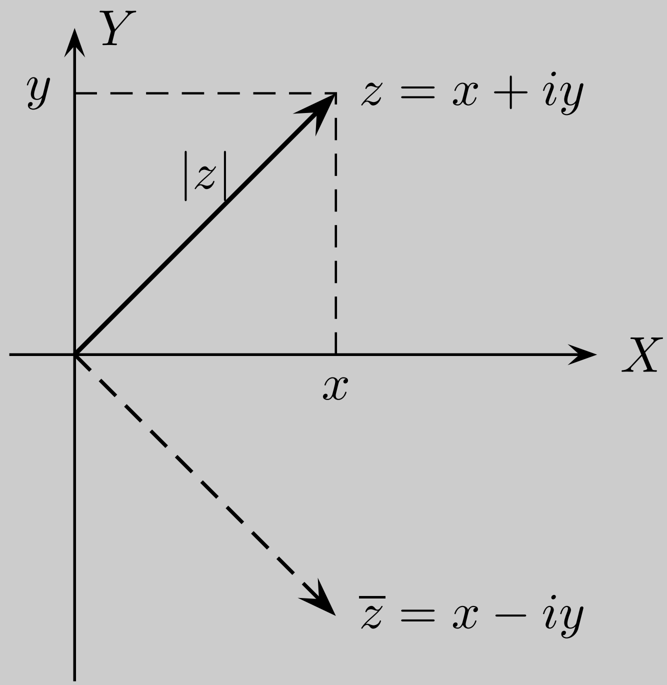
Se representa $z = x + iy$ como el vector del plano (x, y) y, en ese sentido, se habla del *plano complejo*. El eje horizontal recibe el nombre de *eje real*, y el eje vertical recibe el nombre de *eje imaginario*.

Si $z = x + iy$ es un número complejo (con x e y reales), entonces el **conjugado** de z se define como:

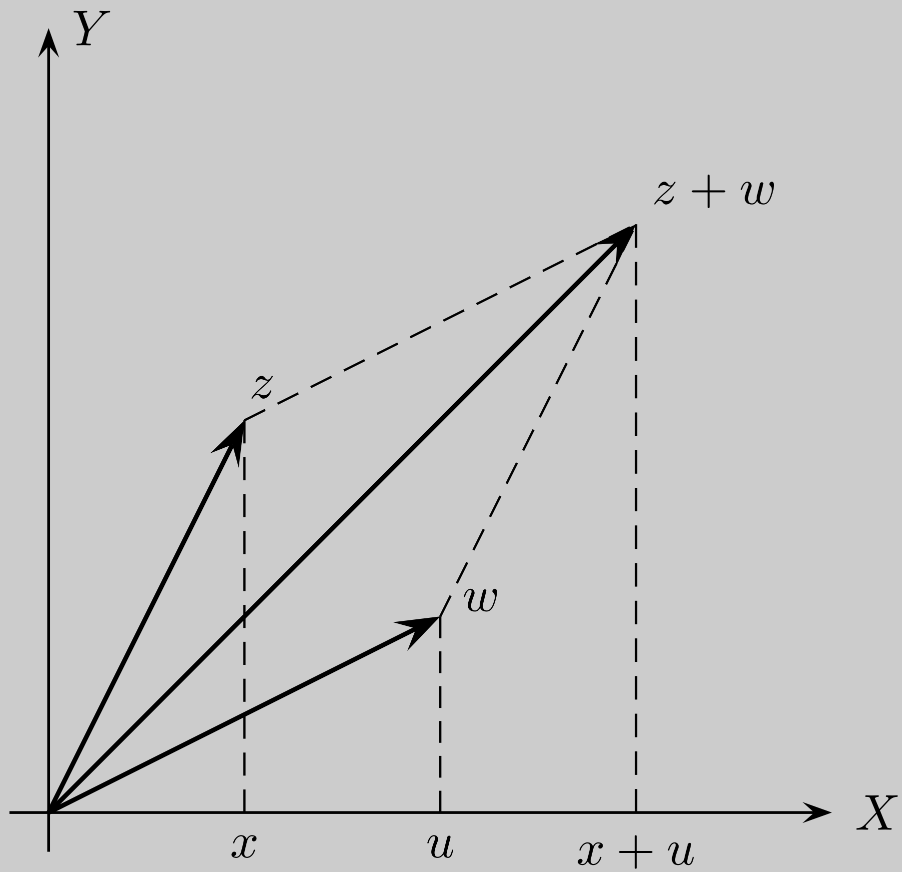
$$\overline{z} = x - iy$$

y el **módulo** o **valor absoluto** de z, se define como:

$$|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$$



Representación gráfica de un número complejo



Suma de números complejos

Propiedades de la conjugación

El conjugado de una suma es la suma de los conjugados y el conjugado de un producto es el producto de los conjugados.

$$\overline{\overline{z}} = z, \quad \overline{z+w} = \overline{z} + \overline{w}, \quad \overline{zw} = \overline{z}\,\overline{w}$$

Propiedades del módulo

Cualesquiera sean los números complejos $z, w \in \mathbb{C}$ se verifica que:

a) $\max\{|\operatorname{Re} z|, |\operatorname{Im} z|\} \leqslant |z| \leqslant |\operatorname{Re} z| + |\operatorname{Im} z|$

b) El módulo de un producto es igual al producto de los módulos.

$$|zw| = |z||w|$$

c) El módulo de una suma es menor o igual que la suma de los módulos.

$$|z+w| \leqslant |z| + |w| \qquad \text{(desigualdad triangular)}$$

La desigualdad triangular es una igualdad si, y solamente si uno de ellos es un múltiplo positivo del otro; equivalentemente, están en una misma semirrecta a partir del origen.

Para expresar un cociente de complejos en forma cartesiana se multiplica numerador y denominador por el conjugado del denominador:

$$\frac{u+iv}{x+iy}=\frac{(u+iv)(x-iy)}{x^2+y^2}=\frac{ux+vy}{x^2+y^2}+i\,\frac{vx-uy}{x^2+y^2}.$$

Ejercicio

Realiza las operaciones indicadas y expresa el resultado en la forma $a + i\,b$.

i) $(7-2i)(5+3i)$ ii) $(i-1)^3$ iii) $\overline{(1+i)(2+i)}(3+i)$ iv) $\dfrac{3+i}{\overline{2+i}}$

v) $\dfrac{(4-i)(1-3i)}{-1+2i}$ vi) $(1+i)^{-2}$ vii) $\dfrac{1+2i}{2-i}$ viii) $i^2(1+i)^3$

Ejercicio

Supuesto que $z = x + iy$ es un número complejo, calcula la parte real e imaginaria de las funciones:

a) $f_1(z) = \overline{z}^2$ b) $f_2(z) = z^3$ c) $f_3(z) = \dfrac{1}{z}$ d) $f(z) = \dfrac{1}{1+z^2}$ e) $f_4(z) = \dfrac{z+i}{z-i}$

Ejercicio

Calcula las siguientes cantidades.

$$\text{a) } |(1+i)(2-i)| \quad \text{b) } \left|\frac{4-3i}{2-i\sqrt{5}}\right| \quad \text{c) } |(1+i)^{20}| \quad \text{d) } |\sqrt{2}+i(\sqrt{2}+1)|$$

Ejercicio

Calcula los números complejos $z = x + iy$ tales que $\dfrac{1+z}{1-z}$ es:

a) Un número real; b) Un número imaginario puro.

Forma polar y argumentos de un número complejo

Un número complejo $x = x + iy$ distinto de 0 puede escribirse en la forma:

$$z = |z|(\cos\vartheta + i\,\operatorname{sen}\vartheta)$$

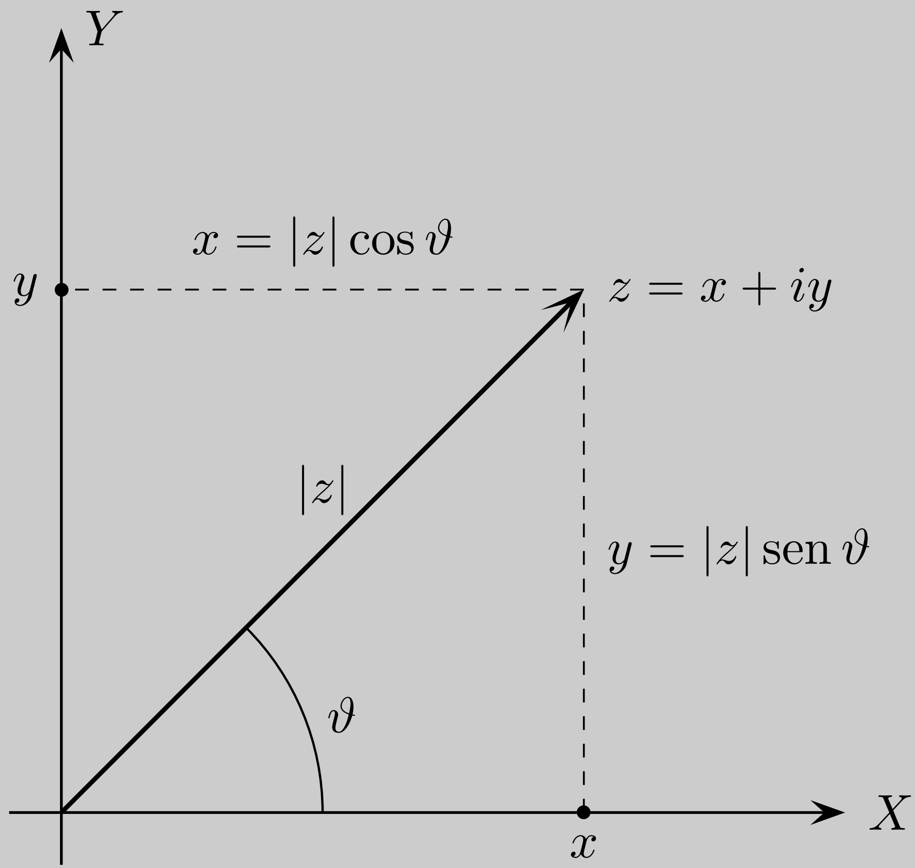
Donde debemos elegir ϑ por las condiciones:

$$\cos\vartheta = \frac{x}{|z|}, \qquad \operatorname{sen}\vartheta = \frac{y}{|z|}$$

Cualquier número $\vartheta \in \mathbb{R}$ que cumpla estas condiciones se llama **un argumento** de z. El conjunto de todos los argumentos de z es:

$$\operatorname{Arg}(\mathbf{z}) = \{\mathbf{t} \in \mathbb{R} : \mathbf{z} = |\mathbf{z}|(\cos\mathbf{t} + \mathbf{i}\,\operatorname{sen}\mathbf{t})\}$$

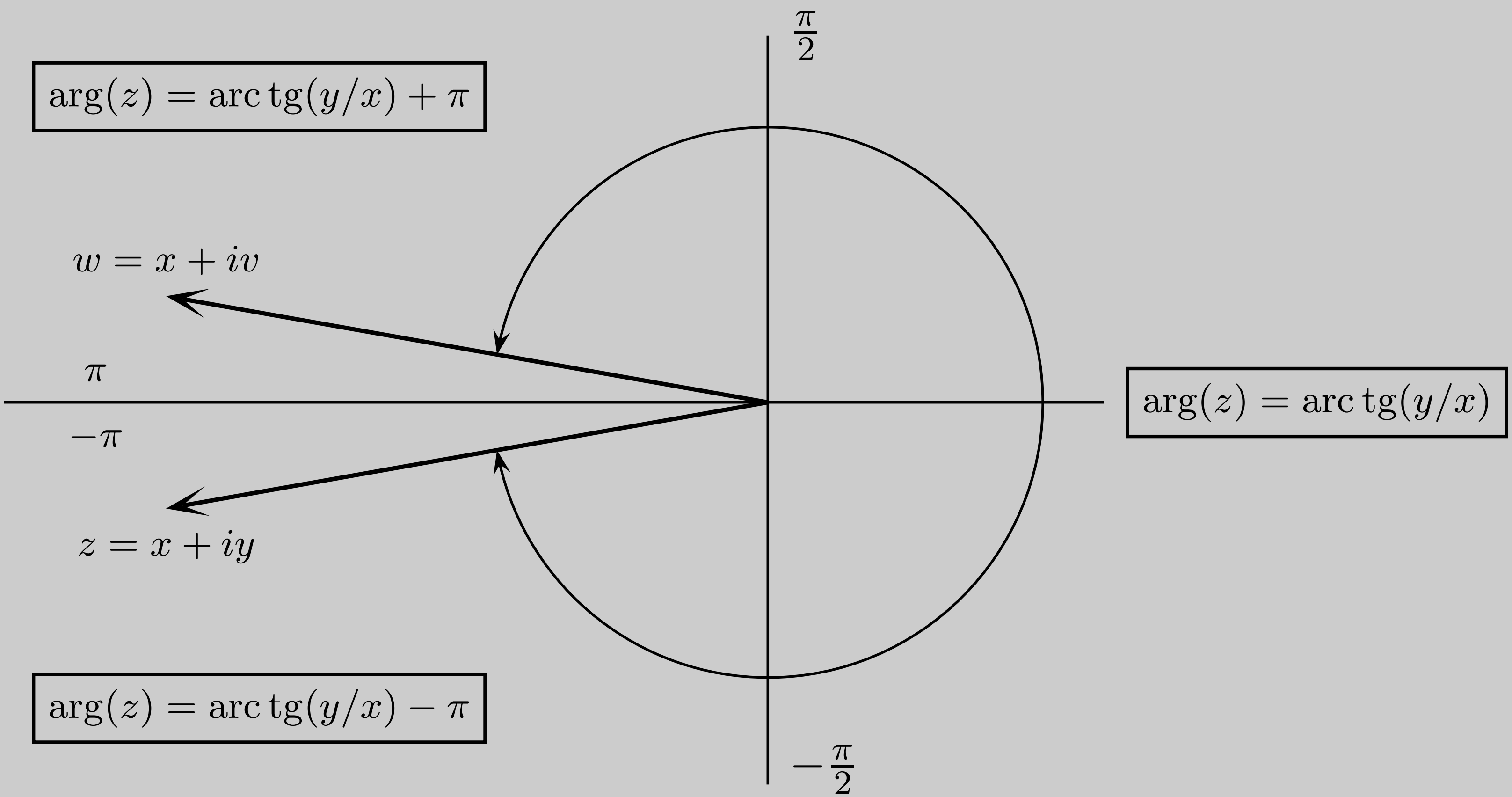
Este conjunto queda determinado cuando se conoce alguno de sus elementos:
Si $t_0 \in \operatorname{Arg}(z)$ cualquier otro es de la forma $t_0 + 2k\pi$ para algún $k \in \mathbb{Z}$.



Forma polar de un número complejo

De entre todos los argumentos de un número complejo $z \neq 0$ hay uno único que se encuentra en el intervalo $]-\pi,\pi]$, se representa por $\arg(z)$ y se le llama **argumento principal** de z. El argumento principal de $z = x + iy \neq 0$ viene dado por:

$$\arg(z) = \begin{cases} \operatorname{arc\,tg}(y/x) - \pi & \text{si } y < 0,\ x < 0 \\ -\pi/2 & \text{si } y < 0,\ x = 0 \\ \operatorname{arc\,tg}(y/x) & \text{si } x > 0 \\ \pi/2 & \text{si } y > 0,\ x = 0 \\ \operatorname{arc\,tg}(y/x) + \pi & \text{si } y \geqslant 0,\ x < 0 \end{cases}$$



Argumento principal

La forma polar es muy útil para realizar productos de números complejos. Sean

$$z = |z|(\cos\vartheta + i\,\operatorname{sen}\vartheta), \qquad w = |w|(\cos\varphi + i\,\operatorname{sen}\varphi)$$

Tenemos que:

$$\begin{aligned} zw &= |z||w|(\cos\vartheta + i\,\operatorname{sen}\vartheta)(\cos\varphi + i\,\operatorname{sen}\varphi) = \\ &= |zw|[(\cos\vartheta\cos\varphi - \operatorname{sen}\vartheta\operatorname{sen}\varphi) + i(\operatorname{sen}\vartheta\cos\varphi + \cos\vartheta\operatorname{sen}\varphi)] = \\ &= |zw|(\cos(\vartheta+\varphi) + i\,\operatorname{sen}(\vartheta+\varphi)) \end{aligned}$$

Para multiplicar dos números complejos se multiplican sus módulos y se suman sus argumentos.

Así pues, el producto de dos números complejos es geométricamente un giro seguido de una homotecia.

$$\boxed{\vartheta \in \operatorname{Arg}(z),\ \varphi \in \operatorname{Arg}(w) \Longrightarrow \vartheta + \varphi \in \operatorname{Arg}(zw)}$$

En particular: $\arg z + \arg w \in \operatorname{Arg}(zw)$. Por tanto:

$$\boxed{\arg z + \arg w = \arg(zw) \iff -\pi < \arg z + \arg w \leqslant \pi}$$

Fórmula de De Moivre

Si $z \neq 0$, $\vartheta \in \operatorname{Arg}(z)$ y $n \in \mathbb{Z}$, se verifica que $n\vartheta \in \operatorname{Arg}(z^n)$. Es decir:

$$\boxed{z^n = \big(|z|(\cos\vartheta + i\ \operatorname{sen}\vartheta)\big)^n = |z|^n\big(\cos(n\vartheta) + i\operatorname{sen}(n\vartheta)\big)}$$

Ejercicio

Expresa los siguientes números en forma cartesiana:

$$\text{a) } (-1 + i\sqrt{3})^{11} \quad \text{b) } \left(\frac{1+i}{1-i}\right)^5 \quad \text{c) } \left(\frac{1+i\sqrt{3}}{1-i}\right)^6 \quad \text{d) } (-\sqrt{3}+i)^{13}$$

Ejercicio

Calcula $\arg(zw)$ y $\arg\left(\dfrac{z}{w}\right)$ supuestos conocidos $\arg z$ y $\arg w$.

Ejercicio

Sea $z = x + i\, y$. Supuesto que $|z| = 1$, $z \neq 1$, $z \neq -i$, prueba que

$$\arg\left(\frac{z-1}{z+i}\right) = \begin{cases} \pi/4 & \text{si} \quad 1 - x + y > 0 \\ -3\pi/4 & \text{si} \quad 1 - x + y < 0 \end{cases}$$

Ejercicio

Demuestra la llamada “igualdad del paralelogramo”:

$$|z+w|^2+|z-w|^2=2(|z|^2+|w|^2) \qquad (z,w\in\mathbb{C})$$

y explica su significado geométrico.

Ejercicio

Dados dos números complejos α y β, calcula el mínimo valor para $z \in \mathbb{C}$ de la cantidad $|z-\alpha|^2 + |z-\beta|^2$.

Sugerencia: La igualdad del paralelogramo puede ser útil.

Ejercicio

Prueba que $\left|\dfrac{z-a}{1-\overline{a}\,z}\right| < 1$ si $|z| < 1$ y $|a| < 1$ y también si $|z| > 1$ y $|a| > 1$.

Sugerencia: Una estrategia básica para probar desigualdades entre *módulos* de números complejos consiste en elevar al cuadrado ambos miembros de la desigualdad.

Raíces de un número complejo

Dado un número natural $n \geqslant 2$, todo número complejo $z \neq 0$ tiene n raíces complejas distintas que vienen dadas por:

$$\boxed{z_k = |z|^{1/n}\left(\cos\frac{\arg z + 2k\pi}{n} + i \operatorname{sen}\frac{\arg z + 2k\pi}{n}\right) \qquad k = 0, 1, 2, \ldots, n-1}$$

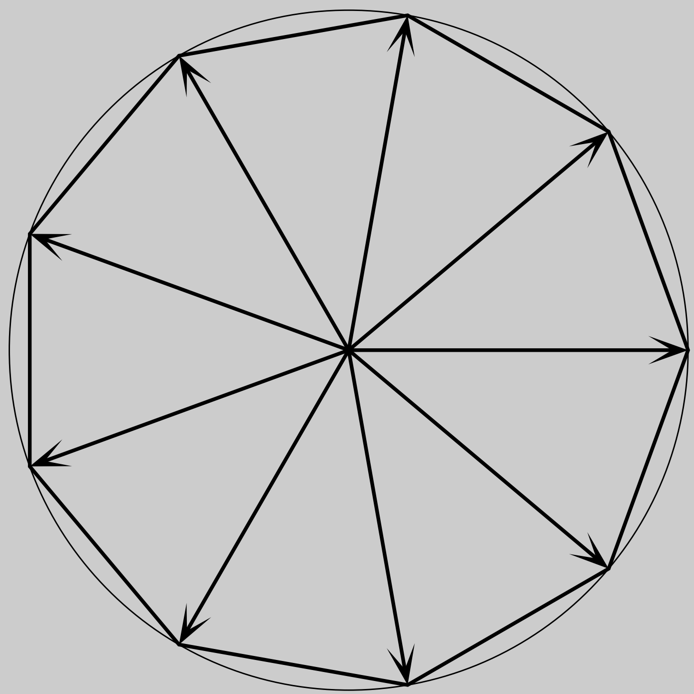
Geométricamente, son los vértices de un polígono regular de n lados centrado en el origen.

Se define la **raíz n-ésima principal** de z que se representa por $\sqrt[n]{z}$ como:

$$\boxed{\sqrt[n]{z} = |z|^{1/n}\left(\cos\frac{\arg z}{n} + i \operatorname{sen}\frac{\arg z}{n}\right)}$$

Observa que $\arg\left(\sqrt[n]{z}\right) = \dfrac{\arg z}{n}$ y, por tanto: $-\dfrac{\pi}{n} < \arg\left(\sqrt[n]{z}\right) \leqslant \dfrac{\pi}{n}$.

La raíz n-ésima principal de z es la única de las raíces n-ésimas de z cuyo argumento principal está en el intervalo $]-\pi/n, \pi/n]$.



Raíces novenas de la unidad

Teorema

El número complejo i es la raíz cuadrada principal del número complejo -1.

$$\boxed{i = \sqrt{-1}}$$

Demostración. Se tiene que $\arg(-1) = \pi$. Por tanto:

$$\sqrt{-1} = \cos(\pi/2) + i \operatorname{sen}(\pi/2) = i$$

$$¿\sqrt[n]{z}\,\sqrt[n]{w} = \sqrt[n]{zw}?$$

En general NO

$\sqrt[n]{z}\,\sqrt[n]{w}$, es *una* raíz n-ésima de zw *pero no tiene por qué ser la principal*.

Se verifica que:

$$\boxed{\sqrt[n]{z}\,\sqrt[n]{w} = \sqrt[n]{zw} \iff -\pi < \arg(z) + \arg(w) \leqslant \pi}$$

Para $n = 2$, $z = w = -1$, tenemos $\arg(-1) + \arg(-1) = 2\pi$, y no se cumple la condición anterior. En este caso:

$$\sqrt{-1}\sqrt{-1} = -1 \neq 1 = \sqrt{1} = \sqrt{(-1)(-1)}$$

es decir $\sqrt{-1}\sqrt{-1} = -1$ es una raíz cuadrada de $1 = (-1)(-1)$ pero no es la raíz cuadrada principal de 1. Ahora ya sabes dónde está el error en lo que sigue:

$$-1 = i^2 = i\,i = \sqrt{-1}\sqrt{-1} = \sqrt{(-1)(-1)} = \sqrt{1} = 1$$

Ejercicio

Calcula todas las soluciones de las ecuaciones:

$$z^7 = 1, \quad z^9 = -\frac{1}{2} + i\,\frac{\sqrt{3}}{2}$$

Ejercicio

Prueba que si una ecuación polinómica con coeficientes reales admite una raíz compleja, z, entonces también admite como raíz a $\overline{z}$. Da un ejemplo de una ecuación polinómica de grado mayor que 1 que tenga como raíz compleja $1+i$ pero no admita como raíz a $1-i$.

Ejercicio

Calcula las soluciones de la ecuación:

$$z^4 - i\sqrt{3}z^2 - 1 = 0$$

La función exponencial

$$\boxed{e^{x+i\,y} = \exp(x + i\;y) = e^x\big(\cos y + i \operatorname{sen} y\big)}$$

Es una *extensión* de la exponencial real a todo $\mathbb{C}$. Observa que:

$$\boxed{|\,e^z\,| = e^{\operatorname{Re} z}, \quad \operatorname{Im} z \in \operatorname{Arg}(e^z)}$$

En particular, obtenemos la llamada *fórmula de Euler*:

$$\boxed{e^{i\,t} = \cos t + i \operatorname{sen} t \qquad (\text{para todo } t \in \mathbb{R})}$$

De la fórmula de Euler se deducen las *Ecuaciones de Euler*:

$$\boxed{\cos t = \frac{e^{i\,t} + e^{-i\,t}}{2}, \qquad \operatorname{sen} t = \frac{e^{i\,t} - e^{-i\,t}}{2i} \quad (t \in \mathbb{R})}$$

La exponencial compleja transforma sumas en productos.

$$\boxed{e^{z+w} = e^z\, e^w \qquad \text{para todos } z, w \in \mathbb{C}}$$

La exponencial compleja es una función *periódica* con período $2\pi i$.

$$\boxed{e^z = e^{z+2k\pi i} \qquad \text{para todo } k \in \mathbb{Z}}$$

Ejercicio

Sea w un número complejo de módulo 1. Expresa los números $w - 1$ y $w + 1$ en forma polar.

Ejercicio

Sea x un número real que no es múltiplo entero de 2π. Prueba las igualdades

$$\text{a)}\quad 1+\cos x+\cos 2x+\cdots+\cos nx = \cos\left(\frac{n}{2}x\right)\frac{\operatorname{sen}\left(\frac{n+1}{2}x\right)}{\operatorname{sen}\left(\frac{x}{2}\right)}$$

$$\text{b)}\quad \operatorname{sen} x+\operatorname{sen} 2x+\cdots+\operatorname{sen} nx = \operatorname{sen}\left(\frac{n}{2}x\right)\frac{\operatorname{sen}\left(\frac{n+1}{2}x\right)}{\operatorname{sen}\left(\frac{x}{2}\right)}$$

Sugerencia: Si llamamos A a la primera suma y B a la segunda, calcula $A+iB$ haciendo uso de la fórmula de De Moivre.